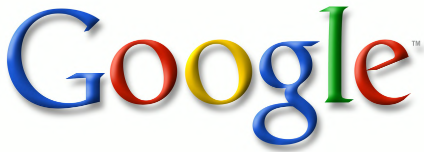


The University of Chicago

LES IDÉES DIRECTRICES DE LA LOGIQUE GÉNÉTIQUE DES MATHÉMATIQUES

A DISSERTATION

SUBMITTED TO THE FACULTY OF THE GRADUATE SCHOOL OF ARTS AND LITERATURE IN CANDIDACY FOR THE DEGREE OF DOCTOR OF PHILOSOPHY

(DEPARTMENT OF MATHEMATICS)

BY
ARTHUR RICHARD SCHWEITZER

CHICAGO
1915

The University of Chicago

LES IDÉES DIRECTRICES DE LA LOGIQUE GÉNÉTIQUE DES MATHÉMATIQUES

A DISSERTATION

SUBMITTED TO THE FACULTY OF THE GRADUATE SCHOOL OF ARTS AND LITERATURE IN CANDIDACY FOR THE DEGREE OF DOCTOR OF PHILOSOPHY

(DEPARTMENT OF MATHEMATICS)

BY
ARTHUR RICHARD SCHWEITZER

CHICAGO
1915

LES IDÉES DIRECTRICES

DE LA

LOGIQUE GÉNÉTIQUE DES MATHÉMATIQUES

I

Dans ses *Principles of Mathematics*, B. Russell[1] a défini les notions mathématiques exclusivement en fonction des idées d'implication, de variable, et des constantes logiques. Cette définition s'accorde tout à fait avec l'idée que Russell se fait de l'inférence, qu'il veut identifier à la déduction[2], alors qu'il regarde l'induction comme « une simple méthode en vue de faire des conjectures plausibles ». L'attitude philosophique qui se découvre à travers ces interprétations se rapproche à coup sûr de celle d'Aristote, qui est évidemment insuffisante au point de vue de la méthode génétique. Encore faudrait-il dire qu'Aristote reconnaît[3] — quoique imparfaitement — l'induction ou l'étude logique des méthodes d'investigation comme distincte de la déduction ou logique de la démonstration. De même, Russell se trouve en accord avec J. S. Mill[4] dont la logique est essentiellement une simple méthode d'analyse.

Une conception plus compréhensive des mathématiques apparaît dans la définition de C. S. Peirce[5]. Peirce définit les mathématiques comme « l'étude des constructions idéales (souvent applicables aux problèmes réels) et conséquemment comme la découverte des relations, encore inconnues, qui subsistent entre les éléments de ces constructions ». Ainsi, à la différence de Russell, il tient compte

1. *Loc. cit.*, p. 3.
2. *Loc. cit.*, p. 11, note; voir aussi § 420.
3. Cf. par exemple : A. Riehl, *Systematische Philosophie* (1907), Teil I, abt. VI, p. 84.
4. *A System of Logic*, London, 1851.
5. Cf. J. B. Shaw, *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. XVIII, 1912, p. 389.

à la fois de l'existence et de la genèse, des mathématiques comme objet, et des mathématiques comme acte de l'esprit. Cette double conception de la mathématique que nous prenons comme base de notre discussion, nous la comprenons comme toute relative et nous reconnaissons le conflit comme faisant partie même de la mathématique. En d'autres termes, nous nous reportons ici à l'aspect imparfait de la science mathématique, à l'espèce d'évolution qui apparaît en elle.

La définition de Peirce peut, aussi bien que celle de Russell, être critiquée en ce qu'elle ne rend pas exactement compte du nombre et de la quantité; mais il est difficile de prétendre que les mathématiques ne doivent s'occuper que de ces notions[1].

Le but du présent article est en somme méthodologique. Nous essaierons de décrire généralement la position logique de la mathématique conçue comme une science de découverte, d'établir des parallèles entre certains auteurs mathématiques et certains philosophes, et enfin d'examiner des exemples d' « activité » mathématique.

II

Une idée directrice « working hypothesis » peut être définie, ou plutôt décrite, comme un instrument[2] employé dans la solution (ou dans l'essai de solution) d'un problème[3] apparaissant au moyen de termes qui sont en désaccord[4]. Nous appellerons cette solution un *médiateur* entre les termes en désaccord. On supposera que cette solution n'introduit pas elle-même un désaccord ultérieur, de sorte que le problème est posé en sa forme dernière. En outre, le problème posé par le désaccord des termes en présence, est seulement un de ceux qui peuvent se présenter entre ces termes. L'univocité du problème est assurée par le but que se propose l'individu, et ceci détermine probablement aussi l'usage à quoi la solution peut être

1. Cf. G. Boole, *Laws of Ihought*, London (1854), p. 12 : Il n'est pas de l'essence des mathématiques de s'occuper uniquement des idées de nombre et de quantité. — Cf. Grassmann, *Gesammelte Werke*, vol. I, part. 1, p. 23.
2. Cf. Bacon, *Novum organum*, part. I, aphorism. II.
3. Sur le désaccord des termes conçu comme problème, voir Schleiermacher, *Gesammelte Werke*, III, vol. IX, p. 202, Wie ist der zwiespalt zu lösen, etc.
4. Aucune restriction sur le nombre des termes n'est ici faite; en particulier, un problème peut naître du désaccord d'un terme avec sa répétition.

employée. Le problème, ainsi déterminé par rapport à un intérêt individuel, a seulement une solution; celle-ci peut être une variable et, par conséquent, avoir un domaine.

Pour un problème donné, c'est par intuition que se fait le choix de l'idée directrice employée, et l'on conçoit qu'un certain nombre d'idées directrices puissent être recherchées avant qu'une solution soit obtenue. Par rapport au problème, une idée directrice peut être *efficace* ou *inefficace*[1]. Une idée directrice efficace est *adaptée* au problème de telle sorte que : 1° le problème donne lieu à un autre problème qui se rapproche de la solution; 2° le problème conduit à un autre problème qui est l'équivalent du premier ou contient dans sa solution la solution du premier. Une idée directrice inefficace est celle qui ne produit aucun changement dans le problème, même formellement, après adaptation; ainsi, elle n'est adaptable en aucun sens du mot. En particulier, une idée directrice n'est pas adaptable à un problème dans lequel les termes en désaccord sont tirés d'une application de l'idée directrice elle-même. Il ne faut pas oublier qu'une idée directrice, qui a été trouvée inefficace pour un certain problème, peut présenter quelque valeur pour d'autres problèmes. Toute idée directrice adaptable tombe, après adaptation, dans l'une des trois[2] catégories : 1° *vérité* absolue ou relative; 2° *fausseté*; 3° *inutilité*[3] (« irrelevancy »).

L'étude des idées directrices suggère maints problèmes difficiles. Toute idée directrice présente en général un double aspect : elles peuvent être considérées comme adaptées ou pas encore adaptées à un certain problème; mieux encore, elles ont des domaines d'adaptation, d'efficacité et d'inefficacité; leurs domaines d'adaptation, au point de vue du contenu, peuvent être analysés en parties constituantes. Un exemple remarquable d'idée directrice est la *fonction propositionnelle* de Russell[4] et le problème de la classification des domaines d'adaptation, au double point de vue de l'extension et de

1. Nous avons employé ces termes : in *Bulletin Amer. Math. Soc.*, vol. XIII (1906), p. 80, et in *Transactions Am. Math. Soc.*, vol. X (1909), p. 312.

2. Peirce, *Amer. Journal of Math.*, vol. VII, 1884-5, p. 187, distingue seulement deux catégories; il confond les catégories de vérité et d'inutilité.

3. Sur l'inutilité et la consistance, voir nos remarques, *Am. Journ. of Math.*, vol. XXIV, 1912, p. 174 : Yet the latter axiom is consistent, etc.

4. Cf. Russell, *Principles of Mathematics*, ch. VII, p. 13; p. 20, § 23; *Am. Journ. of Math.*, vol. XXX (1908), p. 228, 243 : « We assume, then, that every function is equivalent, for all its values, to some *predicative* function of the same argument. This assumption seems to be the essence of the usual assumption of classes. »

la compréhension[1] (« intension »), nous conduirait à sa « théorie des types ». Notre domaine d'adaptation est, en réalité, corrélatif du « domaine de signification » de Russell et du « domaine[2] de possibilité » de Peirce, qui peut-être a suggéré[3] la conception de Russell.

Les remarques précédentes appartiennent à la logique génétique ou inductive, la logique de la découverte, plutôt qu'à la logique déductive. En réalité, les universaux servent de médiateurs entre des termes en désaccord, au moins au point de vue génétique. Pourtant notre position philosophique, malgré son caractère dynamique, subjectif, est, dans son ensemble, très différente de l'attitude empirique de J.-S. Mill; elle se rapproche plutôt de la position de James et Dewey[4]. Dans un admirable essai sur la *Nature des jugements scientifiques*, Dewey[5] dit :

« De toutes les sciences, seule la mathématique s'occupe de propositions absolument générales; de là, la nécessaire interprétation des mathématiques comme un *instrument* à l'usage de la technique et des autres sciences. »

On doit se garder de penser, dans cette citation, que la mathématique n'est qu'inductive dans la mesure où elle est une science appliquée ou un simple instrument entre les mains des autres sciences. Une telle conception des mathématiques serait trop étroite. Dans une magistrale discussion[6] des méthodes scientifiques, l'interdépendance de la déduction et de l'induction dans la mathématique pure est clairement exprimée par Hermann Grassmann :

« Die Ahnung scheint dem Gebiet der reinen Wissenschaft fremd zu sein und allermeisten dem Matematischen. Allein ohne sie ist es unmöglich irgend eine neue Wahrheit aufzufinden; durch blinde Kombination der gewonnen Resultate gelangt man nicht dazu;

1. Pour ces termes, voir, par exemple : E. E. C. Jones, *Mind*, N.-S., vol. XIX (1910), pp. 379-386; *A new law of thought*, etc., *Camb. Univ. Press*, 1911; B. Russell, *Mind*, 1905, p. 479; *Am. J. of Math.*, vol. XXX (1908), p. 249. — Cf. aussi notre mémoire in *Am. J. of Math.*, vol. XXXIV (1912), p. 175, note 2.

2. *Am. J. of Math.*, vol. VII (1884-5), p. 187. — Cf. Les remarques de Peirce, même *Journal*, vol. III (1880), p. 21 : « The total of all that we consider possible is called the *universe of discourse.* »

3. Voir note précédente et les propres remarques de Russell, *Am. J. of Math.*, vol. XXX (1908), p. 233 : « This seems to lead us to the traditional doctrine of the universe of discourse. » — Cf. aussi Boole, *loc. cit.*, pp. 42-43.

4. Cf. G. H. Mead, *Philosophical Review*, vol. IX (1900); A. W. Moore, *Pragmatism and its Critics*, Chicago (1910).

5. *The Decennial Publications of the University of Chicago*, First series, vol. III, p. 8 du mémoire.

6. *Gesammelte Werke*, vol. I, part. 1, Einleitung.

sondern was man zu kombinieren hat und auf welche Weise muss durch die leitende Idee bestimmt sein... Daher ist die wissenschaftliche Darstellung ihrem Wesen nach ein Ineinandergreifen zweier Entwickelungsreihen von denen die eine mit Konsequenz von einer Wahrheit[1] zur andern führt und den eigentlichen Inhalt bildet, die andere aber das Verfahren selbst beherrscht und die Form bestimmt. In der Mathematik treten diese beiden Entwickelungsreihen am schärfsten auseinander. »

La « leitende[2] Idee » que Grassmann a sans doute empruntée à Schleiermacher, c'est essentiellement notre idée directrice. Grassmann décrit l'idée directrice comme une espèce d'analogie supposée avec les domaines de science connexes et déjà connus[3], ou, dans le cas le plus favorable, comme une anticipation directe de la vérité cherchée.

Au début, suivant Grassmann, l'idée directrice est « dunkles Vorgefühl »; l'analyse critique ensuite les résultats de ce « Vorgefühl » et la découverte de la vérité s'ensuit si l'idée directrice est juste[4].

Assez semblables à la précédente citation de Grassmann sont les remarques de Klein[5].

La Mathématique, dit Klein, n'est en aucune façon épuisée par la déduction logique; l'intuition y conserve pleinement sa valeur

1. Grassmann, *loc. cit.*, p. 22 (Cf. p. 16, § 1-2), conçoit la vérité dans la science pure comme une harmonie de la pensée avec l'Être; mais ce dernier à son tour est posé par la pensée; c'est-à-dire que la vérité est une harmonie entre actes de pensée. Sur la vérité comme une harmonie, cf. Schiller, *IIIe internationaler Kongress für Philosophie*, Heidelberg (1909), p. 712. Grassmann exprime une théorie de la pensée conçue comme « copie » des choses, tandis que Dewey regarde la pensée comme un instrument. D'après les *Logical Studies* de Dewey, pp. 140-142, il semble que la conception de la pensée-copie ne soit pas compatible avec celle de la pensée-instrument. Cf. les remarques de A. W. Moore sur Platon dans *Logical Studies*, p. 345; Cf. aussi James, *The Meaning of Iruth*, pp. 78, 82, 84, 85, 97, 98, etc.

2. Cf. Peirce, *Am. J. of Math.*, vol. III (1880), p. 16-17 : « Leading principle »; James, *loc. cit.*, p. 140-1; Dewey, *Decennial Publication*, p. 23 : « Aim in view », « end involved in uppermost interest »; Boole, *loc. cit.*, p. 11 : « directive function of method »; p. 15 « end in view »; p. 10 : « principles which are to guide us ». — Cf. aussi Plato, *Meno*, *guiding principle*.

3. Par exemple : la théorie des fonctions d'une variable complexe a été inspirée, dans son développement, par l'analogie avec la théorie de la physique.

4. Cf. Schleiermacher, *Gesammelte Werke*, *Dialektik*, pp. 297-8; Stosch, *Vierteljahrschrift für Wissensch. Philos.*, vol. XXIX, conclusion. Le corrélatif herbartien de l'anticipation ou presage (Ahnung) est sans doute l'imagination (Einbildung).

5. Göttinger Nachrichten, *Geschäftliche Mitteilungen*, 1895.

spécifique; en fait, la vie de la mathématique dépend de l'interaction entre la *déduction logique* et l'*intuition.*

III

Un médiateur entre des termes en désaccord constitue une connaissance *fondamentale*. Pour les besoins de la discussion qui va suivre, nous trouvons bon de distinguer des médiateurs *typiques* et *non typiques*. Choisir un certain médiateur comme typique dans une classe de médiateurs possibles semble devoir s'expliquer difficilement comme le choix d'une série de termes déterminés par une *relation* dans une classe d'associations. En fait, le dernier problème enveloppe le premier[1]. Car, si nous examinons des exemples explicites de médiateurs dans la littérature mathématique, nous trouvons que leur nouveauté réside dans l'accent que les savants ont apposé sur certaines relations spécifiques entre les termes en désaccord plutôt que dans les termes eux-mêmes. En règle générale, ces derniers sont parfaitement connus au moins comme contenu[2].

Une recherche sur la nature de la relation nous semble donc opportune. Commençons par examiner certaines descriptions, antérieurement données, de la relation. Sur les caractéristiques d'une relation, les auteurs qui ont écrit sur la logique, symbolique ou non, ont jeté peu de lumière. Ainsi Russell, dans *Principles of Mathematics*, p. 49, § 53, exprime simplement la difficulté de déterminer la nature de la relation. De même, il dit, p. 172, § 160 :

« Mere difference *per se* appears to be the bare minimum of a relation, being, in fact a precondition of almost all relations. »

Moins négatif que Russell, mais évidemment insuffisant, est aussi l'effort de De Morgan pour définir la relation. Dans les *Cambridge Philosophical Transactions*, 1864, p. 208, il dit :

« When two objects, qualities, classes or attributes, viewed together by the mind, are seen under some connection, that connection is called a relation ».

Ici *relation* est simplement ramenée à *connection*. La définition de

1. Ailleurs, où, employant le principe de comparaison, nous essayons de donner une genèse d'un relatif binaire, en nous fondant sur la ressemblance entre une dyade ordonnée (*ab*) et sa répétition; Cf. *Am. Journ.*, vol. XXXI (1909), p. 375, où nous avons posé que *ab*R *ab* et *a*R*b* sont équivalents.

2. Très souvent, il faut apporter certains changements formels aux termes en désaccord avant que le médiateur apparaisse comme possible.

De Morgan est aussi très intéressante parce qu'elle contient l'expression « viewing together by the mind » et le mot « some » qui implique une sélection réfléchie. De Morgan va jusqu'à dire (p. 209) que certaines relations appelées *onymatiques* l'emportent sur toutes les autres parce qu'elles sont présentées au moyen de la notion de « nommer ». Un exemple de relation onymatique est fourni par De Morgan dans le rapport du *tout* à la *partie*[1]. A propos de l'attitude d'Aristote sur la nature de la relation, De Morgan observe, p. 331 :

« Aristotle does not give this part [c'est-à-dire la théorie de la relation] of logic a very hopeful look when (Catégories, ch. V ou VII) he puts forward no better phrase than πρός τι to denote his abstract idea of relation. »

Comme dans la définition de la relation de De Morgan, le mot « some » entre dans la définition de J. S. Mill[2]. Dans son *System of Logic*, partie I, ch. III, § 10, Mill[3] dit :

« Whenever two things are said to be related there is some fact or series of facts into which they both enter; and... whenever any two things are involved in some one fact, or, series of facts, we may ascribe to those two things a mutual relation grounded on that fact. »

Mill remarque ensuite que les cas de relation les plus simples sont ceux qui sont exprimés par les mots « antécédent » et « conséquent » et par le mot « simultané »; de même « ressemblance » et « dissemblance », aussi bien que les relations précédentes, doivent être mises à part comme choses *sui generis*. Mill, par ce moyen, conçoit l'égalité[4] comme « un autre mot pour désigner l'exacte ressemblance, communément appelée identité, subsistant entre les choses au point de vue de la quantité ». Une autre définition de la relation est donnée par Mill dans une note sur l'*Analysis* de James Mill (vol. II, p. 10); elle est moins critique, plus arbitraire que la première, étant fondée essentiellement sur le mot « any » :

« Any objects, whether physical or mental, are related, or are in a relation to one another, in virtue of any complex state of conscious-

1. Cf. Russell, *loc. cit.*, ch. XVI, et Grassmann, *loc. cit.*, p. 108, § 4.
2. Contrairement à notre opinion, Mill fonderait probablement l'aspect « sélectif » de « some » sur la *nécessité*.
3. *Loc. cit.*, part. I, ch. II, § 7.
4. Cf. Russell, *loc. cit.*, ch. XX, §§ 159-160; ch. XIX, pp. 161-2, p. 173, § 1; ch. IV, p. 51-2 (note); p. 171, note. Voir aussi Hobhouse « Theory of Knowledge », p. 171-181 (avec p. 173, comparer Russell, *loc. cit.*, p. 224, § 3).

ness into which they both enter; even if it be a no more complex state of consciousness than that of merely thinking them together. »

Il est instructif de comparer la définition de Mill à certains passages de Grassmann[1] (*Ausdehnungslehre*, 1844), spécialement au point de vue de « mere thinking together ». Grassmann dit (*loc. cit.*, p. 24) que la forme discontinue, *devient* au moyen d'une double action de *poser* (Setzen) et *associer* (Verknüpfen), et que la façon dont cette forme vient du donné est « blosses Zusammendenken ». P. 102 (cf. p. 40, § 3), *loc. cit.*, Grassmann mentionne que « mere thinking together », en tant qu'idée générale, caractérise l'addition des formes abstraites, engendrées dans le même sens. De même le « viewing together by the mind » de De Morgan a son corrélatif, dans les œuvres de Boole et Grassmann. Parlant de certaines définitions de la mesure de la probabilité, Boole observe (in *Laws of Thought*, p. 275 et 402) :

« In a scientific view of the theory of probabilities it is essential that both principles should be viewed together in their mutual bearing and independence. »

Grassmann, dans son *Ausdehnungslehre* de 1844, a maints passages qui ont rapport au sujet que nous discutons. En particulier, nous appelons l'attention sur la description de l'idée directrice (*loc. cit.*, p. 31), sur les remarques concernant une exposition scientifique « von Anfang an » (p. 17, § 2), sur la représentation concrète d'une somme formelle (p. 108, § 51), sur la représentation concrète du produit extérieur d'un nombre arbitraire de grandeurs élémentaires du premier degré (p. 177, 179, §§ 108, 109); sur la détermination de la valeur d'un « eingwandtes Produkt », qui n'est pas zéro (p. 212, 213, § 129; cf. § 135 et p. 295, § 2). Dans ces passages, les termes de Grassmann corrélatifs de « viewing together » sont « Zusammenschauen », et « Ueberschauen », Ineinanderschauen », etc.; incidemment la plupart et peut-être

1. F. Enriques, *Encycl. des sciences math.*, t. III, vol. I, p. 71, remarque que, comme il est bien connu, la philosophie de Herbart a fortement influé sur le développement des idées de Grassmann. Sans doute, Grassmann a-t-il aussi emprunté au système de Schleiermacher. Notons la similitude entre les titres de sections de l' « Einleitung » de l'*Éthique* » de Schleiermacher et ceux de l'Einleitung de l'*Ausdehnungslehre* de Grassmann. Le dernier ouvrage semble aussi avoir quelque relation avec les *ouvrages mathématiques*, influencés par la philosophie hégélienne et traitant *de l'Être et du Devenir*. Cf. G. Bohlmann, *Jahresber. der Deut. Math. Ver.*, 1899, p. 107.

les plus essentiels des passages de l'*Ausdehnungslehre* sont fondés sur « viewing together ».

Nous revenons à la conception fondamentale qui domine les précédents passages, à savoir, la relation. Dans nos citations, aucune mention n'a été faite explicitement du facteur *sélection*; ce dernier nous semble être l'élément essentiel de la relation. Schröder, in *Mathematische Annalen*, vol. XLVI, p. 144, donne une genèse d'un « relatif binaire » fondé sur la sélection de « dyades ordonnées » dans une classe de dyades ordonnées[2]. Schröder appelle une dyade ordonnée un « Elementepaar » ou un relatif binaire individuel[3]. La nature d'un relatif binaire est éclaircie par Schröder :

« Irgend zwei Elemente i und j lassen sich — etwa unter dem Gesichtspunkt einer gewissen von i zu j bestehenden Beziehung — in bestimmter Folge zu einem Elementepaar $i : j$ zusammenstellen und bildet die Gesammtheit aller erdenklichen Elementepaare :

$$1^2 = \Sigma^{ij}\, i : j,$$

einen zweiten aus dem ursprünglichen abgeleiteten Denkbereich der aus den Variationen mit Wiederholungen zur zweiten Klasse von des letztern Elementen besteht... Es wird unter einem binären Relative... nichts andres zu verstehen sein, als ein Inbegriff... von Elementenpaaren,.. *irgendwie* hervorgehoben aus gennantem Bereiche. »

Le « irgendwie » de Schröder contient essentiellement le problème de la relation. Nous soupçonnons qu'un examen de cet « irgendwie » montrerait que l'intérêt et l'anticipation sont les guides de la sélection[4]. Comme Schröder, J. Mill, dans le second volume de son *Analysis*, tient compte de la sélection dans la genèse de la relation qu'il regarde comme « une question de convenance résolue par expérience ».

« What is the reason that some pairs do, while many more do not, receive relative names? The cause is the same by which we are guided in imposing other names. As the various combi-

1. Pour la définition : cf. Grassmann, *loc. cit.*, p. 111, note.
2. Cf. *Am. Jour.*, vol. XXXI (1909), p. 370.
3. Cf. Peirce, *Am. Jour.*, vol. III (1880), p. 44.
4. Intérêt désigne ici le but proposé. *Anticipation* nous reporte à *imagination* et à la représentation sensible enveloppée dans celle-ci. Cf. aussi Platon, *Sophiste*, 264; *République*, 529. Sur la sélection : cf. Boole, *loc. cit.*, p. 43, § 2.

nations of ideas are far too numerous for naming and we are obliged to make a selection, we name those which we find it of most importance to have named, omitting the rest. »

Les remarques de Mill sur la relation suggèrent une expression corrélative en accord avec notre position logique générale et, ainsi modifiées, elles semblent être le plus clair énoncé du problème que nous ayons pu trouver. Nous dirons dès lors qu'une pure association de termes, bien qu'étant la condition nécessaire d'une relation, n'est pas proprement une relation. Celle-ci résulte d'une classe d'associations, donnée par sélection en conformité à un but proposé.

Nous avions recherché la nature de la relation afin d'obtenir une explication de l'idée de médiateur typique, avec laquelle, disions-nous, l'idée de relation (en tant qu'association typique) est en étroite connexion. Le résultat de notre recherche semble être que les médiateurs typiques sont ceux qui ont été sélectionnés par le savant dans une classe de médiateurs possibles, sous la direction d'une idée [1], ou pour remplir un but dans un certain domaine logique visé. Pour nous, celui-ci est avant tout la Logique symbolique, y compris [2] la mathématique.

On peut donner d'un médiateur typique une expression explicite dans le langage technique des conceptions de la Logique symbolique; nous l'appelons *formel* et son opposé *non-formel*. Des exemples des deux catégories seront donnés dans une section suivante.

IV

Il existe une affinité entre un médiateur conçu comme typique et un médiateur conçu comme *valeur*. Mettant à part des faits tels que l'approbation personnelle, la satisfaction, l'affection, etc., qui n'appartiennent pas à notre sujet, nous appelons valeur d'un objet l'identification de cet objet (comme faisant partie de l'expérience [3]) avec une expérience choisie dans un ensemble de faits d'expériences. Si une telle identification est possible, l'objet est dit *avoir une valeur* par rapport à l'expérience choisie. La

1. Cf. Dewey, *Logical Studies*, p. 129 : Every idea is equally a function of reference and control, etc.
2. Cf. Grassmann, *loc. cit.*, p. 23, note.
3. Cf. James, *The Meaning of Truth*, pp. 110-114, 268-270, 100, etc.

valeur est donc un médiateur entre des termes en désaccord. Dans quelle mesure une valeur est individuelle ou universelle, actuelle ou potentielle? il est souvent difficile d'en décider avec quelque certitude. James[1] semble reconnaître ce problème, quand il dit :

« In some men, theory is a passion just as music is in others. The form of inner consistency is pursued far beyond the line at which collateral profits stop. Such men systematize and classify and schematize and make synoptical tables and invent ideal objects for the pure love of unifying. Too often the results, glowing with truth for the inventors, seem pathetically personal and artificial to bystanders. »

Un tel problème apparaît, dans la mathématique pure, conçue comme un tout, quand on la compare aux sciences appliquées; il apparaît aussi dans les diverses branches de la mathématique pure, quand on les compare les unes aux autres, et finalement dans les résultats mathématiques, nouvellement trouvés et dont la relation organique avec le système courant des mathématiques n'a pas encore été reconnue[2]. On retrouve facilement dans le développement de la mathématique des recherches qui semblèrent éminemment « personnelles » et « artificielles » aux contemporains quand elles apparurent pour la première fois, mais qui, depuis, se sont profondément enracinées dans la science. Un exemple célèbre[3] est naturellement l'*Ausdehnungslehre* de Grassmann; Gauss n'a pas publié ses recherches sur la géométrie non-euclidienne[4] parce qu'il craignait « les cris des Béotiens »; la théorie des ensembles transfinis[5] de Cantor n'a pas pleinement triomphé, même à présent, du scepticisme des mathématiciens.

Le terme « valeur » et le terme « importance », qui semble étroitement parent du premier, sont fréquemment employés par les mathématiciens sans qu'ils aient essayé de décrire clairement leur signification. Grassmann[6] suggère pourtant une interprétation :

« In der That ist es bei der Darstellung einer neuen Wissenschaft, damit ihre Stellung und ihre Bedeutung recht erkannt werde,

1. *Loc. cit.*, p. 99.
2. Cf. Grassmann, *loc. cit.*, p. 15, § 1; p. 16, § 3.
3. Cf. Grassmann, *Ges. Werke*, vol. I, part. 2, p. 10; Engel, *Jahresb. d. deut. Math. Verein.*, 1909, pp. 353-4; 1910, pp. 10-12.
4. Cf. Stäckel u. Engel, *Theorie der Parallellinien*, p. 226.
5. Cf. Schoenflies, *Jahresb. d. deut. Math. Ver.*, vol. VIII (1900), p. 2.
6. *Ges. Werke*, vol. I, part. 1, p. 15.

unumganglich nothwendig, sogleich ihre Anwendung und ihre Beziehung zu verwandlen Gegenstäden zu zeigen...

« Durch diese Anwendungen auf die Physik glaubte ich besonders die Wichtigkeit ja die Unentbehrlichkeit der neuen Wissenschaft und der in ihr Gebotenen Analyse dargethan zu haben. »

Quelques auteurs ont tendance à déprécier le développement formel et la généralisation en mathématiques[1]. Ainsi E. Study[2] parle de « banales généralisations ». En ce qui concerne la généralisation, nous tenons au contraire que celle-ci (intensive ou extensive) constitue l'essence du développement mathématique et que toute généralisation doit être admise volontiers au sein des mathématiques[3]. Discerner les généralisations grossières des non grossières est difficile, puisque cela dépend du point de vue de l'intérêt, etc.

V

Dans l'étude de l'idée directrice dans la logique des mathématiques, trois facteurs essentiels interviennent. Ce sont les termes en désaccord ou données; l'instrument de la médiation, ou idée directrice; et, finalement, la médiation elle-même. Au point de vue de la détermination, chacun de ces facteurs est susceptible de degrés; les données, par exemple, peuvent être ou ne pas être capables de *reconnaissance explicite* ou d'*expression explicite*; d'autre part, une expression explicite peut être ou ne pas être *formelle*[4]. Il ne serait pas difficile de donner un exemple de caractère mixte : une partie des données admet une expression formelle, mais l'autre partie n'admet pas de reconnaissance explicite, etc. En dehors de ces précédentes distinctions, on pose que, pour qu'il y ait jugement, un conflit de termes est nécessaire[5].

En règle générale, les mathématiciens ont été peu disposés à

1. Cf. M. Bocher, *Bull. of the Am. Math. Soc.*, vol. XVII (1910-1911), p. 136; vol. XVIII (1911-12), p. 17-18 : « On formal developments ». — Cf. W. F. Meyer, *Archiv. der Mathematik und Physik*, series 3, vol. VIII (1904-5), p. 296, § 4.

2. *Geometrie der Dynamen*, p. 272.

3. Cf. Naville, *Logique de l'hypothèse*, p. 156; Russell, *Principles of Mathematics*, p. 7, § 8; Grassmann, *Ges. Werke*, vol. I, part. 1, p. 30, § 13; H. Dufumier, La généralisation mathématique, *Revue de métaphysique et de morale*, vol. XIX (1911), p. 723-758.

4. Cf. la définition d'un médiateur formel donnée plus haut.

5. Cf. A.-W. Moore, *Pragmatism and its Critics*, p. 125.

admettre l'idée directrice dans la mathématique pure, à reconnaître explicitement que la mathématique pure est, sous un certain aspect, science d'observation. En réalité, les recherches mathématiques sont longtemps apparues comme purement déductives; les termes en désaccord, intervenant au cours de la recherche, n'étaient pas explicitement reconnus, et même peut-être pas reconnus du tout; l'instrument de médiation employé était dissimulé; l'effort heuristique était rarement mentionné; le médiateur final seul apparaît. Au milieu de cette uniformité, les expositions de Grassmann forment de remarquables exceptions. L'*Ausdehnungslehre* de 1844 est peut-être unique dans la littérature mathématique, en ce sens qu'elle montre fréquemment et reconnaît explicitement l'acte génétique de la découverte. On demandera naturellement dans quelle mesure le procédé heuristique est discernable en mathématique en général? De cette question nous nous occupons dans la suite de notre discussion, prenant pour base la position logique générale impliquée dans les précédentes remarques. Certains principes mathématiques ont été soumis à la controverse, surtout parce que ces principes n'ont pas reçu d'expression formelle, à contenu proprement mathématique. Il faut espérer que de telles controverses peuvent être laissées de côté, en reconnaissant plus complètement l'interdépendance [1] du contenu des mathématiques et des instruments employés dans la détermination de ce contenu, c'est-à-dire, des idées directrices. Des exemples de ces derniers sont le *principe de comparaison*, le *principe de continuation*, le *principe d'économie de la pensée*, et enfin le *principe de spéciale situation* qui pourtant n'est réellement qu'une application de l'un des trois premiers. Ceux-ci, naturellement, ne sont pas mutuellement exclusifs.

1° *Le principe de comparaison.*

Le principe de comparaison est de beaucoup l'idée directrice la plus employée en mathématiques. Nous le définissons comme suit :

L'existence de ressemblances entre des termes donnés implique l'existence d'un terme général qui existe sous les termes particuliers et les unifie du point de vue de leurs ressemblances.

Cet énoncé est la généralisation d'un principe mathématique

1. Sur l'impossibilité d'affranchir le contenu formel des mathématiques de son aspect heuristique, cf. Grassmann, *Ges. Werke*, vol. I, part. 1, p. 16, § 2.

exprimé par E. H. Moore[1] et d'un principe assez semblable, dû à Meinong[2], qui pourtant avait en vue la logique plutôt que les mathématiques. Nous n'avons pu découvrir antérieurement d'énoncés explicites, bien qu'il ait été constamment fait usage du principe de comparaison par les auteurs anciens et modernes. En particulier ce principe est clairement en évidence dans les dialogues de Platon[3]; la procédure scientifique de Socrate est fondée sur lui; il joue aussi dans la théorie des Idées de Platon un rôle fondamental[4]. Une moderne application du même principe se trouve dans la *définition par abstraction*. L'aspect pragmatique de ce genre de définition a été noté par G. Vailati[5]. Peano[6] a donné nombre d'exemples de ce procédé d'abstraction; ce dernier a été l'objet d'une discussion critique de la part de Burali-Forti[7], Russell[8], et autres. Comme exemples d' « opérations » définissables par abstraction, Burali-Forti mentionne[9] la *direction,* la *longueur*, l'*aire*, le *nombre ordinal et cardinal.*

Si l'on cherche à appliquer le principe de comparaison, la considération des analogies mathématiques est évidemment une première étape à marquer. De nombreux exemples de telles analogies sont cités par Poincaré dans son article[10] « L'avenir des mathématiques », et par E. Study[11] dans sa « Geometrie der Dynamen ».

L'étude du principe de comparaison au sens large conduit aux problèmes fondamentaux de la philosophie. Des théories spéciales se rapportent, par exemple, à la signification ontologique du *terme*, à la nature analytique ou synthétique des *ressemblances*, à la sélec-

1. *The New Haven Mathematical Colloquium*, p. 1 : « The existence of analogies between central features of various theories implies the existence of a general theory which underlies the particular theories and unifies them with respect to those central features. »

2. Cf. *Zeitschrift für Psychologie und Physiologie der Sinnes organe*, vol. XXIV (1900), p. 78 : « Die Umfangscollective des Aehnlichen stellen Allgemeinheiten dar, an denen die Abstraction wenigstens unmittelbar keinen Anteil hat. » Voir aussi Russell, *Pr. of Math.*, p. 162, 171.

3. Cf. *Phèdre*, 265-266; *Lois*, 12, 965; *Symposium*, 211; *Menon*, 72, 74; *Protagoras*, 331; *Phédon*, 74, 75, 101.

4. Cf. Les idées d'égalité et de dualité dans le Phédon, *loc. cit.*

5. Cf. Pragmatism and Mathematical Logic, *Monist*, vol. XVI (1906), p. 486-7.

6. *Formulaire mathématique*, 1903, p. 316.

7. *L'Enseignement mathématique*, vol. I (1899), p. 246; *Bibl. du Cong. Int. Phil.*, vol. III (1901), p. 289.

8. Cf. *Pr. of Math.*, § 108, p. 112; p. 114-115; p. 166, § 157; p. 167, note; p. 285, § 270; p. 305; p. 219-220, § 209-210; p. 226, § 216.

9. Bibl. du Congrès, *loc. cit.*, p. 295.

10. *Bulletin des Sciences mathématiques*, série 2, vol. XXXII (1908), p. 184-186, etc.

11. *Loc. cit.*, p. 168. Cf. index « Analogien ».

tion de ces ressemblances, à la relation du *terme général* aux particuliers, à l'interprétation moniste ou pluraliste du terme général, etc.

2° *Le principe de continuation.*

Un autre principe, employé dans les recherches mathématiques, est le principe de continuation :

« *L'existence d'une classe d'éléments particuliers* (*ou* « *operanda* »), *soumis à des opérations particulières, implique l'existence d'une classe d'éléments généraux soumis à des opérations générales.* »

Comme applications spéciales[1] de ce principe, nous renvoyons à l'*invariance de la classe d'éléments dans la généralisation des opérations*, et d'autre part à la *persistance des propriétés des opérations dans la généralisation des éléments des opérations*. Si nous prenons comme classe d'éléments particuliers les entiers absolus intuitifs, et comme classe correspondante d'opérations particulières, des lois formelles de l'arithmétique de ces nombres entiers, le principe de continuation peut être employé dans la construction d'un système de fractions, de nombres rationnels dirigés et des nombres complexes, etc. A ce point de vue, le principe se confond essentiellement avec le « principe de la permanence des lois formelles » (Hankel) ou « le principe de la permanence des formes équivalentes » (Peacock). Ce dernier principe est aussi employé dans la détermination des lois qui interviennent dans la théorie des nombres transfinis. Un exemple important de l'application de ce principe est la définition de la classe générale des séries de puissances obtenues à partir d'une série primaire et connues comme « fonction analytique » dans la théorie des fonctions de Weierstrass[2]. Un autre exemple est fourni par le principe de correspondance de E. Study[3] en vertu duquel, par un choix convenable de l'élément spatial, la géométrie elliptique réelle devient identique à la géométrie euclidienne des couples de points sur deux sphères congruentes. En général « l'établissement d'une correspondance entre deux ensembles et la recherche des pro-

1. Cf. l'interprétation de Kronecker de l'idée directrice en mathématiques; E. Netto, Ueber Leopold Kronecker, *in* Math. Mémoire lu au *Congrès. intern. de math.*, New-York (1896), p. 245-6.

2. Cf. par exemple : Osgood, *Lehrbuch des Functionen theorie* (1907), p. 376, etc.

3. *Am. J. of Math.*, vol. XXIX (1907), p. 117; cf. E. Salkowski, *Jahrbsb. der deut. Math. Ver.*, vol. XXI, p. 27.

priétés qui sont mises en lumière par la correspondance » (ce qui, selon Clifford [1], est « l'idée centrale des mathématiques modernes et se retrouve à travers tout le développement de la science pure et appliquée ») est essentiellement une application du principe de continuation.

La preuve des méprises commises à propos de l'idée directrice en mathématiques se trouve dans la variété des opinions exprimées par les mathématiciens sur le « principe de permanence » précédemment mentionné. Aussi Russell [2] l'appelle « simplement une erreur »; Jourdain [3] le tient pour « inutile », tandis qu'il est défendu par Schoenflies [4] et d'autres.

3° *Le principe de l'économie de la pensée.*

Le principe de comparaison et le principe de continuation ont pu être discutés à la lumière du *principe d'économie de la pensée* [5].

Ce dernier, formulé par E. Mach [6], requiert que *toute fin scientifique soit atteinte avec la dépense minima de pensée.* Ce principe est donc franchement pragmatique; il conduit aisément à la thèse de Dewey : la pensée est un instrument, penser c'est s'adapter à un but, et, pour atteindre ce but, il faut considérer l'économie et l'efficacité de l'effort [7].

Comme relevant de ce principe, nous citerons, dans la recherche mathématique, les idées directrices de *beauté* [8] (*élégance*), *simplicité*, *harmonie*, *naturel*. Les savants font parfois à tort appel à ces concepts, sans doute pour cacher une insuffisance théorique. Il semble, par exemple, qu'il y ait un usage illégitime de l'idée de « naturel » dans la « Projective Geometrie der Ebene » de H. E. Grassmann dans la dérivation du produit régressif [9]; de même, chez

1. *Lectures and Essays*, vol. I, p. 335; cf. la première thèse d'E. Müller dans sa dissertation, Königsberg, 1898; et E. Müller, *Jahresb. d. deut. Math. Ver.*, vol. XXII (1913), p. 44-59.
2. Cf. *Pr. of Math.*, p. 376-7, § 357.
3. *Mind*, N.-S., 1912, p. 448; *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. XLI (1909-10), dernier §.
4. *Jahresb. der deut. Math. Ver.*, vol. VIII (1900), p. 3.
5. Cf. E. Mach, *Die Mechanik in ihrer Entwickelung*, 4e éd., Leipzig (1901), p. 515-6; *Pop. Wiss. Vorl.*, Leipzig (1903), p. 224-5.
6. *Die Mechanik*, etc., p. 519, § 6; *Erkenntniss und Irrtum*, Leipzig (1905), p. 174, § 11; p. 134, § 12.
7. Cf. Dewey, *Logical Studies*, p. 80.
8. Cf. H. Poincaré, *Science et Méthode*, Paris (1909), p. 58.
9. *Loc. cit.*, p. 28.

E. Lasker, *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. XXVIII, p. 225, dans la dérivation numérique d'un point arbitraire d'une ligne à partir des points donnés de la ligne.

L'idée de « simplicité » apparaît très fréquemment dans l'*Ausdehnungslehre* de Grassmann. La remarque suivante de Grassmann est spécialement intéressante, *Gesammelte Werke*, vol. I, part. I, p. 142 :

« Interessant ist es noch zu bemerken, wie bei der rein geometrischen Darstellung wie auch in der abstrakten Wissenschaft, die Betrachtung vom Raume aus zur Ebene, und dann erst von dieser zur geraden Linie führt, und dass somit die jenige Betrachtung, in welcher alles räumlich auseinander tritt, sich raümlich entfaltet, *auch als die der Raumlehre eigenthümliche und für sie als die einfachste erscheint* [1], wenn die Gebilde in einander liegen, dann auch alles noch verhüllt während, erscheint, wie der Keim in der Knospe, und erst seine raümliche Bedeutung gewinnt wenn man das Ineinanderliegende in Beziehung setzt zu dem raümlich Entfalteten. »

Natorp [2] comprend ce passage comme se rapportant à l'association de l'espace à n dimensions au nombre complexe à n unités. Une autre illustration de la remarque de Grassmann, imprévue [3] de l'auteur lui-même, c'est notre génération de l'espace à n dimensions [4]. L'affirmation de Grassmann [5] que la plus simple manière de satisfaire à l'équation fonctionnelle $f(p) = f(-p)$ est $f(p) = p^2$ sera facilement admise. Au contraire, on sera plus tenté de contredire à sa remarque [6] que certaines généralisations doivent être faites s'il faut conserver la simplicité du calcul.

Les idées directrices qui précèdent sont difficiles à décrire; en règle générale, leur emploi est assez vague et reste plus ou moins incertain. Grassmann, *l. c.*, p. 16, juxtapose « simplicité » et « vérité ». Dans la *Logique de l'hypothèse*, Naville pose, p. 145-6, que « le simple est le signe du vrai » et que la tâche de la science est de rechercher la simplicité et l'harmonie. C. S. Peirce [7] essaie de donner un criterium de la simplicité en logique, en se fondant sur l'impli-

1. Les *italiques* sont de nous.
2. Cf. ses *Die logischen Grundlagen der exacten Wissenschaften*, p. 262.
3. Grassmann, *loc. cit.*, p. 293, établit avec précision que la ligne droite est la base de ses définitions. Cf. aussi l'*Elementargrösse* de Grassmann.
4. Cf. *Amer. Jour. of Math.*, vol. XXXI (1909), p. 365-410.
5. *Loc. cit.*, p. 345.
6. *Loc. cit.*, p. 217, note.
7. *Am. Jour. of Math.*, vol. III (1880), p. 21, note.

cation : si une conception A implique une conception B, mais non inversement, alors B est « plus simple » que A. F. Bernstein[1] considère une démonstration mathématique comme « la plus simple » si elle requiert l'application du minimum de principes fondamentaux. Aucune de ces définitions n'est adéquate. La description de la « simplicité » est difficile en raison du caractère relatif de cette notion[2]. Peut-être conviendrait-il de dire que le signe de la simplicité d'un concept, comme de sa vérité, est dans son « pouvoir d'action »[3].

4° *Principe de spéciale situation.*

Ce principe, dont l'expression est essentiellement mathématique, a reçu un grand nombre d'énoncés; quelques-uns de ceux-ci ont visé, sans succès[4], à une expression formelle. L'histoire du principe remonte à Poncelet et Cauchy. Poncelet l'a appelé le « principe de continuité ». Schubert le met en évidence dans son « Kalkul der Abzählenden Geometrie » (Leipzig, 1879); il a été largement employé par les mathématiciens. Schubert l'énonce[5] ainsi :

« *Si une forme algébrique* Γ *est soumise à une condition* Z, *simple ou formée de* c *éléments, avec* c *constantes, il existe* (*en général*) *un nombre fini* N *d'éléments spatiaux qui satisfont à la fois à la définition de la forme* Γ *et à la* c-*tuple condition* Z. *Si maintenant* Z *est une condition spatiale, c'est-à-dire, si certaines autres formes spatiales* Γ' *sont données, alors le nombre* N (*s'il reste fini*) *est invariant dans les changements relatifs de position des formes* Γ' *et à travers les applications particulières des formes* Γ' *qui ne contredisent pas leur définition.* »

Ce principe semble être une particularisation du principe de continuation. Schubert a remarqué qu'il était une interprétation de ce qu'on appelle le théorème fondamental de l'algèbre : toute équation du n^e degré à coefficients réels ou complexes a n racines[6].

Le principe de spéciale situation a été le sujet d'une controverse,

1. *Atti del IV. Cong. Int. dei Matematici*, vol. III (1908), p. 392.
2. Cf. Grassmann, *loc. cit.*, p. 332-3.
3. Cf. James, *Pragmatism*, p. 217.
4. Cf. D. Hilbert, *Archiv. der Math. und Phys.*, sér. 3, vol. I (1901), p. 223; Zeuthen, *Encyklopädie der Math. Wiss.*, Bd. III_2, Heft 3, p. 257-312; notamment p. 275, § 1.
5. *Loc. cit.*, § 4.
6. Cf. Zeuthen, *loc. cit.*, p. 306-307, etc., et Study, *Archiv. der Math. u. Phys.*, série 3, vol. VIII (1904-1905), p. 275. — Cf. aussi Zeuthen, *C. R. Congr. Stockholm*, p. 32-42.

à laquelle ont pris part G. Kohn[1], R. Sturm[2], E. Study[3] et A. von Brill[4]. Kohn et Study ont pris une attitude plutôt négative à l'égard de ce principe; la position de Sturm et de von Brill est plus favorable, et ce dernier fait apparaître l'élément intuitif dans son emploi. Enfin Zeuthen[5] insiste sur les connexions algébriques de ce principe, comme garantie de ses applications.

Un champ apparemment illimité de recherches mathématiques apparaît dans la détermination du domaine de vérité des précédents principes. Cette remarque nous amène à citer des exemples d'idées directrices qui ont été remplacées par des principes mathématiques formels.

Dans son *Mémoire sur les intégrales définies*, Cauchy[6] donne cette citation de Laplace sur l'évaluation des intégrales définies :

« On peut donc considérer ces passages [du réel à l'imaginaire] comme des moyens de découvertes semblables à l'induction; mais ces moyens, quoique employés avec beaucoup de précaution et de réserve, laissent toujours désirer les démonstrations de leurs résultats. »

Cette transition de l'imaginaire au réel, Cauchy a essayé de lui donner un fondement rigoureux en analyse.

A propos du domaine de vérité du principe de spéciale situation, une contribution a été apportée par von Brill[7] qui a donné la preuve algébrique d'un principe de correspondance, employé inductivement par Cayley.

Dans les *Mathematische Annalen*, vol. LIX (1904), p. 161, D. Hilbert a montré que l'existence d'une fonction minima dans la solution des problèmes de valeur limite appartient au domaine de vérité du principe de Dirichlet[8]. Récemment R. Courant[9] a découvert un

1. *Archiv.*, etc., s. 3, vol. IV (1903), p. 312.
2. *Archiv.*, s. 3, vol. XII (1907), p. 113-116, § 2.
3. *Archiv.*, s. 3, vol. VIII (1904-5), p. 271.
4. *Verh. des Dritten Intern. Math. Kong.*, Heidelberg (1904), p. 282.
5. *Loc. cit.*, p. 271, § 9 et p. 306-7.
6. Cauchy, *Œuvres*, t. I (1882), p. 329-330.
7. Cf. *Math. Ann.*, vol. VI (1873), VII (1874), XXXI (1888), XXXVI (1890). — Cf. aussi : A. Hurwitz, *Leipziger Berichte*, vol. XXXVIII (1886), p. 10; H.-G. Zeuthen, *Math. Annalen*, vol. XL (1892), p. 99; *Atti del IV Congresso intern. dei mat.*, vol. II (1908), p. 227.
8. Cf. *Jahresbericht d. deut. Math. Ver.*, vol. VIII (1900), p. 184-8. Hilbert dit du principe de Dirichlet, *loc. cit.* : « Dieses Prinzip kann als Leitstern zur Auffindung von strengen und einfachen Existenz beweisen [in der Variationsrechnung] dienen. » Hilbert a reconnu aussi, l'importance des « désaccords » dans la recherche mathématique : *Foundations of Geometry*, p. 131, § 2.
9. *Math. Ann.*, vol. LXXII (1912), p. 517.